# Согласованный фильтр.

Оптимальным согласованным фильтром называется линейный фильтр, максимизирующий отношение сигнала к помехе.

Алгоритм различения двух и более сигналов на фоне белого гауссовского шума имеет ясный физический смысл: наиболее вероятным переданным сигналом считается тот сигнал, который меньше отличается (в среднеквадратичном смысле) от принятого сигнала. Таким образом, оптимальный приемник минимизирует среднюю вероятность ошибки. В аналитической форме алгоритм оптимального приёмника при равновероятных сигналах имеет вид:ё

Если: http://thebard.narod.ru/TES/ekzamen/37.files/image002.gif, то Z(t) º S1(t), иначе S2(t), т.е. решение принимается в пользу сигнала S1(t).



фор. 1

Из теории оптимальных методов радиоприема известно, что в условиях действия гауссовской помехи типа белого шума оптимальный приемник должен вычислять интеграл вида:

где N0 - односторонняя спектральная плотность шума; Т - длительность сигнала; u(t) - принятый сигнал; s(t) - полезный сигнал;

Интеграл (фор. 1) можно рассматривать как меру взаимной корреляции принятого сигнала u(t) и полезного сигнала s(t) сигналов. Чтобы осуществить реализацию выражения (фор. 1), используют корреляционный приемник. С другой стороны, интеграл (фор. 1) можно рассматривать как свертку сигнала u(t) с импульсной характеристикой некоторого фильтра. В этом случае необходимо использовать согласованный фильтр.

Рассмотрим задачу синтеза оптимального фильтра в условиях действия аддитивной помехи.

Такая поставновка задачи соотвествует задачи синтеза оптимального фильтра в условиях действия аддитивной помехи, решение которой описыватся следующи м обращзом.

Пусть принятый сигнал имеет вид



фор.

где s(t) - полезный сигнал известной формы со спектральной плотностью Fs(jω); n(t)стационарный случайный процесс со спектральной плотностью мощности Fn(ω).

Будем отыскивать оптимальный фильтр в классе линейных фильтров. Тогда сигнал на входе фильтра с учетом принципа суперпозиции можно представить как



фор. 3

Найдем отношение р мощности полезного сигнала к мощности помехи на выходе фильтра в некоторый момент времени t0.



фор. 4

где K(jω) - комплексно-частная характеристика фильтра.

Соответственно в момент времени t0



фор. 5

Мощность помехи на выходе фильтра



фор. 6

В формулах (фор. 4) и (фор. 6) через Fs,вых(jω) и Fn,вых(ω) обозначены спектральная плотность полезного сигнала и спектральная плотность мощности помехи на выходе фильтра.

С учетом (фор. 5) и (фор. 6) выражение для р в момент времени t0 запишется как



фор. 7

Понятно, что чем больше величина р, тем выше помехоустойчивость приема. Поэтому определим фильтр, который обеспечивал бы на выходе максимальное соотношение сигнал/помеха.

Воспользуемся неравенством Буняковского - Шварца



фор. 8

справедливым для любых функций А(ω) и В(ω), для которых интегралы в (фор. 8) имеют смысл. Заметим, что неравенство (фор. 8) превращается в строгое равенство, если



фор.

где а- постоянная; В\* (ω) - функция, комплексно-сопряженная с функцией В(ω). С учетом (фор. 8) можно записать



фор.

и, соответственно,



фор. 11

С учетом (фор. 9) находим, что максимальное отношение сигнал/помеха



достигается при



фор. 12

где Fs\*(jω) - комплексно-сопряженный сигнал.

Таким образом фильтр с комплексно - частотной характеристикой, определяемой формулой (фор. 12), является наилучшим в классе линейных фильтров, а при гауссовских помехах также наилучшим образцом и в классе нелинейных фильтров.

Из выражения (фор. 12) следует, что коэффициент передачи фильтра зависит от отношения спектральной плотности сигнала к спектральной плотности мощности помехи: коэффициент передачи тем больше, чем больше это отношение. Таким образом, оптимальный фильтр избирательно пропускает те или иные частотные составляющие. Очевидно, что отношение сигнал/помеха будет тем больше, чем сильнее отличается спектр сигнала от спектра помехи.

Рассмотрим случай, когда помеха представляет собой белый шум со спектральной плотностью мощности N0/2. В этом случае комплексно - частотная характеристика оптимального фильтра



фор.

а соотношение сигнал/помеха



фор. 14

где Е - энергия сигнала.

Фильтр с характеристикой (фор. 13), оптимальный для помехи типа белого шума называется согласованным.

Максимальное отношение сигнал/помеха (фор. 14) на выходе такого фильтра определяется только энергией сигнала и спектральной плотностью мощности помехи и не зависит от формы сигнала. По значению это отношение совпадает с максимальным отношением сигнал/ помеха на выходе корреляционного приемника. Отсюда, в частности, следует, что в условиях действия помехи типа белого шума помехоустойчивость корреляционного приемника и согласованного фильтра одинаковы.

Рассмотрим более подробно комплексно - частотную спектральную плотность полезного сигнала в виде



где |Fs(jω)| и ϕ(ω) - амплитудный и фазовый спектр сигнала соответственно.

Тогда



фор.

С другой стороны,



фор. 16

где |K(jω)| - амплитудно-частотная характеристика фильтра; Ψ(ω) - фазовая характеристика фильтра.

Сравнивая (фор. 15) и (фор. 16) находим



фор.

фор.

Из (фор. 17) следует, что амплитудно частотная характеристика согласованного фильтра с точностью до постоянной совпадает с амплитудным спектром сигнала.

Фазовая характеристика согласованного фильтра определяется двумя слагаемыми. Первое из них - ϕ(ω) равно фазовому спектру сигнала, взятому с противоположным знаком. Назначение его в том чтобы компенсировать фазовые сдвиги различных составляющих сигнала. В результате в некоторый момент времени t=t0 все составляющие выходного сигнала будут совпадать по фазе и, складываясь, давать максимум выходного сигнала. Если бы фазовая характеристика фильтра не компенсировала фазовые сдвиги составляющих сигнала, то максимумы гармонических составляющих сигнала не совпадали бы во времени, а это привело бы к уменьшению выходного напряжения.

Второе слагаемое - ωt0 обеспечивает задержку момента совпадения фаз составляющих сигнала на величину t0. Понятно, что значение t0 не может быть меньше длительности обрабатываемого сигнала.

Напряжение на выходе согласованного фильтра



фор. 19

Из (фор. 19) следует, что выходное напряжение определяется только амплитудным спектром сигнала и не зависит от фазового спектра. Это объясняется тем, что взаимные фазовые сдвиги составляющего сигнала скомпенсированы фазовой характеристикой фильтра.

Максимальное значение uвых(t) принимает в момент времени t=t0.. Еще раз подчеркнем, что значение t0 должно быть больше или равно длительности сигнала, т.е. максимум uвых(t) достигается только после обработки всего принятого сигнала.

Рассмотрим импульсную характеристику h(t) согласованного фильтра. Учитывая, что h(t) любого фильтра связано K(jω) преобразованием Фурье, находим



фор. 20

Из выражения (фор. 20) следует, что импульсная характеристика согласованного фильтра является зеркальным отображением сигнала ts(t) относительно прямой t=t0/2 (рис. 1).



рис.

Учитывая условие физической реализуемости фильтра h(t)=0 при t<0, обнаруживаем, что

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| s(t0-t)=0 | при t<0 |  |
| s(t)=0 | при t>t0 |  |

фор.

Условие (фор. 21) показывает, что значение t0 надо выбирать большим или равным длительности сигнала tc. На практике обычно для уменьшения реакции фильтра берут t0=tc.

Найдем формулу напряжения на выходе фильтра, для этого воспользуемся интегралом Дюамеля:



фор. 22

С учетом (фор. 20) получаем



фор. 23

В момент времени t=t0



фор. 24

Видно, что выражение (фор. 24) совпадает с выражением (фор. 1), т.е. согласованный фильтр, как и корреляционный приемник, вычисляет взаимную корреляцию принятого и полезного сигналов. Если при корреляционном приеме копия ожидаемого сигнала вырабатывается на приемной стороне с помощью специального генератора, то при согласованной фильтрации информация о сигнале заключена в комплексно-частотной характеристике.

Если перенести начало отсчета времени в точку t=t0, то из (фор. 23)



т.е. напряжение на входе согласованного фильтра в отсутствии помех совпадает с корреляционной функцией полезного сигнала.

В заключение отметим, что согласованный фильтр, в отличии от корреляционного приемника обладает свойствами инвариантности относительно момента прихода сигнала. Фильтр, согласованный с некоторым сигналом s(t), имеет импульсную характеристику, определенную выражением (фор. 20), Очевидно, что этот же фильтр будет согласованным с сигналом s(t-t1), сдвинутым по времени относительно s(t) на t1. Изменение времени прихода сигнала приводит только к смещению момента достижения выходным сигналом его максимального значения.

# Кареляционный приемник